ZETAFUNKTIONEN IN DER GRUPPENTHEORIE – MIT AUGENMERK AUF p-ADISCHE LIEGRUPPEN

BENJAMIN KLOPSCH

Zusammenfassung. Sei G eine endlich erzeugte Gruppe. Dann ist für jede natürliche Zahl n die Anzahl der Untergruppen vom Index genau n in G endlich, und folglich läßt sich die formale Dirichletreihe $\zeta_G(s) := \sum_{H \leq_f G} |G : H|^{-s}$ bilden. Unter geeigneten Bedingungen, z.B. falls G nilpotent ist, definiert $\zeta_G(s)$ eine analytische Funktion und besitzt zudem eine Eulerproduktzerlegung. Durch Betrachtung der lokalen Faktoren wird man dazu geführt, entsprechende Zetafunktionen für p-adische Liegruppen bzw. Liegitter zu untersuchen ...

In meinem Vortrag habe ich versucht, einen Einblick in die junge und schnell wachsende Theorie dieser Zetafunktionen zu vermitteln.

1. Einleitung

In der ersten Hälfte des zwanzigsten Jahrhunderts bestand nach den enormen Fortschritten in der algebraischen Zahlentheorie zunächst die Hoffnung, eine entsprechende, aber vielleicht ganz neuartige „nicht-kommutative“ Theorie für Schiefkörper zu entwickeln. Es stellte sich jedoch bald heraus, daß das Studium der endlichen Schiefkörpererweiterungen von $\mathbb{Q}$ keine großen Überraschungen bereithielt.

Vor etwa zwanzig Jahren wagten Fritz Grunewald und Dan Segal einen viel weiteren Schritt ins Nicht-kommutative, indem sie begannen endlich erzeugte, nilpotente Gruppen auf ihre arithmetischen Eigenschaften hin zu untersuchen. Ein zentrales Objekt in der algebraischen Zahlentheorie ist die Dedekindsche Zetafunktion. Nach ihrem Vorbild läßt sich für jede endlich erzeugte Gruppe G die formale Dirichletreihe $\zeta_G(s) := \sum_{H \leq_f G} |G : H|^{-s}$ bilden. Falls G nicht „zu viele“ Untergruppen von endlichem Index besitzt, konvergiert $\zeta_G(s)$ auf einer rechten komplexen Halbebene $\{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > \alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, und definiert so eine analytische Funktion. Für die Klasse der endlich erzeugten, nilpotenten Gruppen wurden grundlegende Eigenschaften dieser Zetafunktionen erstmals in den achtziger Jahren aufgedeckt [GSS88]. Seitdem hat es, auch auf dem eng benachbarten Gebiet Untergruppenwachstum, eine rasante Entwicklung gegeben; davon zeugt die kürzlich erschienene Monographie [LS03]. Klassische Zetafunktionen, die algebraischen Gruppen zugeordnet sind, erscheinen nunmehr in einem neuen Licht [dSL96], und erst kürzlich wurde entdeckt, daß die Zetafunktion $\zeta_G(s)$ einer endlich erzeugten, nilpotenten Gruppe G eng zusammenhängt mit dem Zählen von Punkten auf gewissen G zugeordneten Varietäten [dSG00].

Im folgenden möchte ich, nicht zuletzt anhand von konkreten Beispielen, einen Eindruck davon vermitteln, was die Hauptergebnisse und die anstehenden Herausforderungen auf diesem jungen Forschungsgebiet sind. Dabei erlaube ich mir, auch einige weniger gewichtige eigene Resultate mitzuteilen. Thematisch ähnlich ausgerichtet und teilweise ausführlicher geschrieben ist das Kapitel „Zeta Functions of Groups“ in [dSSS00].

2. Begriffsbildung und erste markante Beispiele

Sei G eine Gruppe. Für $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir

$$a_n(G) := \#\{H \leq G \mid |G : H| = n\} \quad \text{und} \quad s_n(G) := \sum_{k=1}^{n} a_k(G).$$

Wir wollen voraussetzen, daß $a_n(G)$ für jede natürliche Zahl n endlich ist. (Dies ist sicherlich der Fall, wenn G endlich erzeugt ist.) Uns interessieren dann die arithmetischen Eigenschaften der Folge $a_n(G)$, $n \in \mathbb{N}$, und asymptotische Abschätzungen für das Wachstum der Folge $s_n(G)$, $n \in \mathbb{N}$. Zu diesem Zweck bilden wir die formale Dirichletreihe

$$\zeta_G(s) := \sum_{H \leq_f G} |G : H|^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(G) n^{-s}.$$

Augenscheinlich geschieht dies in Analogie zur Dedekindschen Zetafunktion eines Zahlkörpers, die auf gleiche Weise durch das Zählen von Idealen im zugehörigen Ganzheitsring entsteht. Die Invariante

$$\alpha(G) := \inf\{\beta \in \mathbb{R} \mid s_n(G) = O(n^{\beta})\} = \limsup \frac{\log s_n(G)}{\log n} \in [0, \infty]$$

mißt den (polynomiellen) Grad des Untergruppenwachstums von G. Ist $\alpha(G) < \infty$, so besitzt die Gruppe G polynomielles Untergruppenwachstum (oder abkürzend PSG für den englischen Ausdruck „polynomial subgroup growth“).

Ist G eine PSG Gruppe, so konvergiert $\zeta_G(s)$ punktweise absolut auf der rechten Halbebene $\{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > \alpha(G)\}$ und definiert dort eine holomorphe Funktion. Unter der (schwachen) Zusatzbedingung $\alpha(G) \neq 0$ divergiert die Reihe $\zeta_G(s)$ für $s = \alpha(G)$, und $\alpha(G)$ stimmt überein mit der sogenannten Konvergenzabzisse von $\zeta_G(s)$. Unser Ziel besteht nun darin, die analytischen Eigenschaften der Zetafunktion $\zeta_G(s)$ besser zu verstehen und diese anschließend in Verbindung zu setzen mit den algebraischen Eigenschaften der Gruppe G.

Wir beschließen diesen Abschnitt mit zwei wegweisenden Beispielen, die schon seit nunmehr zwanzig Jahren einen gewissen Vorzeigestatus besitzen.

Beispiel 2.1. *Sei $G := \mathbb{Z}^d$ die freie abelsche Gruppe vom Rang d. Ein Induktionsargument zeigt, daß*

$$\zeta_G(s) = \zeta(s)\zeta(s-1)\cdots\zeta(s-d+1)$$

ist, wobei $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ die Riemannsche Zetafunktion bezeichnet. Wir erhalten $\alpha(G) = d$ und mittels eines einfachen Tauberschen Satzes präzise asymptotische Abschätzungen für $s_n(G)$:

$$s_n(G) \sim d^{-1}\zeta(d)\zeta(d-1)\cdots\zeta(2)n^d \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Im einfachsten nicht-trivialen Fall $d = 2$ gilt wegen $\zeta(2) = \pi^2/6$ beispielsweise

$$s_n(G) \sim (\pi^2/12)n^2 \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Offenbar besitzt $\zeta_G(s)$ eine meromorphe Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$.

Beispiel 2.2. *Sei $G = \langle x, y \mid [[x,y],x] = [[x,y],y]\rangle$ die diskrete Heisenberggruppe. Wir bemerken, daß G sich konkret realisieren läßt als Gruppe aller oberen 3×3 Dreiecksmatrizen über $\mathbb{Z}$ mit Einträgen 1 auf der Diagonalen. Eine nicht-triviale Rechnung zeigt:*

$$\zeta_G(s) = \zeta(s)\zeta(s-1)\zeta(2s-2)\zeta(2s-3)\zeta(3s-3)^{-1}.$$

Hieraus erkennt man, daß $\alpha(G) = 2$ ist und $\zeta_G(s)$ an der Stelle $s = 2$ einen Pol zweiter Ordnung besitzt. Ein geeigneter Tauberscher Satz liefert:

$$s_n(G) \sim \frac{\zeta(2)^2}{2\zeta(3)} n^2(\log n) \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Offensichtlich läßt sich $\zeta_G(s)$ meromorph auf ganz $\mathbb{C}$ fortsetzen.

3. Welche Gruppen haben polynomielles Untergruppenwachstum?

Ist G eine Gruppe, so bildet $R(G) := \bigcap\{N \trianglelefteq G \mid |G:N| < \infty\}$ eine charakteristische Untergruppe von G. Offenbar gilt $a_n(G) = a_n(G/R(G))$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und das Untergruppenwachstum von G besagt wenig über die algebraische Struktur von $R(G)$. Es ist daher sinnvoll, sich auf solche Gruppen G zu beschränken, für die $R(G) = 1$ ist; diese heißen residuell-endlich.

Satz 3.1 (Lubotzky, Mann, Segal [LMS93]). *Sei G eine endlich erzeugte, residuell-endliche Gruppe. Dann sind äquivalent:*
(1) *G hat polynomielles Untergruppenwachstum;*
(2) *G enthält eine Untergruppe von endlichem Index, welche auflösbar und von endlichem Rang ist.*

Definitionsgemäß besitzt eine Gruppe H endlichen Rang, falls es eine natürliche Zahl d gibt, so daß sich jede endlich erzeugte Untergruppe von H schon von d Elementen erzeugen läßt. Endliche Gruppen und Untergruppen der additiven Gruppe $\mathbb{Q}^+$ besitzen diese Eigenschaft. Ist H eine residuell-endliche, auflösbare Gruppe von endlichem Rang, so gibt es eine endliche Kette von Untergruppen $1 = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq H_r = H$, wobei jede Faktorgruppe H_i/H_{i-1} entweder endlich oder Untergruppe von $\mathbb{Q}^+$ ist. Ein Induktionsargument liefert die Implikation von (2) nach (1) in Satz 3.1.

Die andere Richtung, von (1) nach (2), ist viel schwieriger einzusehen. Sei G eine endlich erzeugte, residuell-endliche Gruppe mit PSG. Der Nachweis, daß G die Bedingung (2) erfüllt, beruht auf mehreren Schritten, die wir nur grob skizzieren können:

- (i) Ergebnisse der Theorie der endlichen Gruppen (inklusive der Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen) erlauben es, die möglichen Isomorphietypen der oberen Kompositionsfaktoren von G einzuschränken.
- (ii) Mittels geeigneter Linearisierungsmethoden reduziert man das Problem auf den Fall, daß G linear über einem Körper der Charakteristik Null ist.
- (iii) Unter Verwendung des Primzahlsatzes zeigt man, daß (unendliche) halbeinfache arithmetische Gruppen niemals PSG haben. Aufgrund der „Lubotzky-Alternative“ (Stichwort „starke Approximation für lineare Gruppen“) folgt, daß G eine auflösbare Untergruppe von endlichem Index besitzt.
- (iv) Zum Schluß ist (unter Verwendung der Auflösbarkeit) nachzuweisen, daß G zudem endlichen Rang hat.

Bemerkung. Rein gruppentheoretisch betrachtet, stellt sich die Frage: Was passiert eigentlich, wenn wir statt Untergruppen von endlichem Index Untergruppen von endlicher Ordnung zählen? Klassische Arbeiten von Baer, Černikov, et al. beschreiben die Struktur von Gruppen, die für jedes $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ nur endlich viele Elemente der Ordnung n besitzen. Derartige Gruppen scheinen jedoch keine interessante arithmetische Struktur zu tragen; vgl. [Klo03b].

Eine wichtige Unterklasse der PSG-Gruppen bilden die endlich erzeugten, nilpotenten Gruppen; diese sind automatisch residuell-endlich und besitzen endlichen Rang. Sei G eine endlich erzeugte, nilpotente Gruppe. Die bekannte Tatsache, daß jede endliche, nilpotente Gruppe direktes Produkt seiner Sylow-Untergruppen ist, führt zu der Eulerproduktzerlegung

$$\zeta_G(s) = \prod_p \zeta_{G,p}(s),$$

wobei das Produkt über alle Primzahlen p zu bilden ist und die lokalen Faktoren $\zeta_{G,p} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{p^k}(G)p^{-ks}$ jeweils Untergruppen zählen, deren Index in G eine Potenz von p ist. Jede Untergruppe der nilpotenten Gruppe G ist subnormal in G. Daher ist für jedes p der lokale Faktor $\zeta_{G,p}(s)$ zugleich die Zetafunktion der pro-p Vervollständigung $\widehat{G}_p$ von G. Es liegt daher nahe, etwas allgemeiner das Untergruppenwachstum von (topologisch) endlich erzeugten pro-p Gruppen zu untersuchen. Das folgende Resultat fußt auf Lazards herausragender Arbeit [Laz65], die übrigens für das gesamte Gebiet in entscheidender Weise eine Art Katalysatorrolle gespielt hat.

Satz 3.2. *Eine pro-p Gruppe besitzt genau dann polynomielles Untergruppenwachstum, wenn sie p-adisch analytisch ist.*

Es gibt also zwei sehr unterschiedliche, interessante Klassen von Gruppen, deren Zetafunktionen wir gerne verstehen möchten: (1) endlich erzeugte, nilpotente Gruppen und (2) kompakte p-adische Liegruppen. Innerhalb dieser Klassen finden sich durchaus auch ganz konkrete Gruppen von besonderem Interesse, wie z.B. die Serie $\mathrm{SL}_d(\mathbb{Z}_p)$, $d \in \mathbb{N}$.

4. Methoden, Ergebnisse und offene Fragen

4.1. **Liegruppen.** Sei G eine kompakte p-adische Liegruppe. Dann besitzt G eine offene uniforme pro-p Untergruppe U, und die Berechnung von $\zeta_G(s)$ läßt sich auf endlich viele, den Nebenklassen von U in G zugeordnete Zetafunktionen zurückführen. Wir beschränken uns der Übersicht halber auf den denkbar einfachsten Fall, nämlich $G = U$. Dann kann $\zeta_G(s)$ (bis auf einen konstanten Vorfaktor) als p-adisches Integral der Gestalt

$$\int_{V \subseteq \mathbb{Z}_p^m} |f(\mathbf{v})|_p |g(\mathbf{v})|_p^s d\mu$$

geschrieben werden, wobei sowohl der Integrationsbereich V als auch die Funktionen f, g von der Struktur von G abhängen. Die Integration erstreckt sich über ausgewählte, aber nicht eindeutig zugeordnete Erzeugendensysteme fester Länge für die Untergruppen von G; diese werden parametrisiert durch Vektoren $\mathbf{v} \in V \subseteq \mathbb{Z}_p^m$. Im Integranden beschreibt $|g(\mathbf{v})|_p$ den Index der $\mathbf{v}$ zugeordneten

Untergruppe von G, und das Gewicht $|f(\mathbf{v})|_p$ trägt der Tatsache Rechnung, daß die gleiche Untergruppe aufgrund verschiedener Erzeugendensysteme mehrfach gezählt wird.

Als einfachstes Beispiel geben wir eine Integraldarstellung für die freie abelsche pro-p Gruppe $\mathbb{Z}_p^d$ an. Jede Untergruppe von $\mathbb{Z}_p^d$ kann von d Elementen erzeugt werden, und jedes d-Tupel in $\mathbb{Z}_p^d$ läßt sich in einer $d \times d$ Matrix über $\mathbb{Z}_p$ zusammenfassen. Es gilt

$$\zeta_{\mathbb{Z}_p^d}(s) = (1 - p^{-1})^{-d} \int_V |\lambda_{11}|_p^{s-1} |\lambda_{22}|_p^{s-2} \cdots |\lambda_{dd}|_p^{s-d} d\mu,$$

wobei der Integrationsbereich aus allen oberen Dreiecksmatrizen besteht:

$$V = \{(\lambda_{ij}) \in \mathrm{Mat}_d(\mathbb{Z}_p) \mid \lambda_{ij} = 0 \text{ if } i > j\}.$$

Dieses spezielle Integral läßt sich leicht ausführen; man erhält

$$\zeta_{\mathbb{Z}_p^d}(s) = \zeta_p(s)\zeta_p(s-1) \cdots \zeta_p(s-d+1),$$

wobei $\zeta_p(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p^{-ks}$ den lokalen p-Faktor der Riemannschen Zetafunktion bezeichnet; vgl. Beispiel 2.1. Im allgemeinen ist die explizite Berechnung derartiger Integrale aber äußerst schwierig. Ergebnisse der p-adischen Modelltheorie zeigen immerhin, daß $\zeta_G(s) = \Phi(p^{-s})/\Psi(p^{-s})$ eine rationale Funktion über $\mathbb{Q}$ in p^{-s} ist; vgl. [dS93]. Dies bedeutet anschaulich, daß die Folge $a_{p^k}(G)$, $k \in \mathbb{N}$, ab einem bestimmten Punkt eine lineare Rekursionsgleichung erfüllt.

Jede kompakte p-adische Liegruppe besitzt eine offene pro-p Untergruppe U, die auf natürliche Weise die Struktur eines $\mathbb{Z}_p$-Liegitters $L = L_U$ trägt. Unter geeigneten Bedingungen (z.B. $\dim(U) \leq p$) bildet jede Untergruppe von U zugleich ein Lieteilgitter von L und umgekehrt; siehe [Klob]. Für solche Liegruppen U genügt es also, die entsprechende Zetafunktion $\zeta_L(s)$ des zugehörigen $\mathbb{Z}_p$-Liegitters $L = L_U$ zu bestimmen. Die wenigen, bislang explizit bekannten Zetafunktionen wurden allesamt als Zetafunktionen von Liegittern berechnet.

Die „einfachste“ einfache $\mathbb{Q}_p$-Liealgebra $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{Q}_p)$ enthält das $\mathbb{Z}_p$-Liegitter $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z}_p)$. Eine nicht-triviale Rechnung [Ila99] zeigt für $p \geq 3$:

$$\zeta_{\mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z}_p)} = \zeta_p(s)\zeta_p(s-1)\zeta_p(2s-1)\zeta_p(2s-2)\zeta_p(3s-1)^{-1}. \tag{4.1}$$

Ein entsprechender Ausdruck für die Zetafunktion von $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z}_2)$ ist inzwischen auch bekannt [dST02]; der Einfachheit halber möchte ich mich im weiteren aber auf den Fall $p \geq 3$ beschränken.

Die Formel (4.1) zeigt insbesondere, daß die Anzahl der Lieteilgitter mit Index p^n in $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z}_p)$ von der Größenordnung np^n ist. Shalev äußerte daraufhin die Vermutung, daß pro-p Gruppen mit linear beschränktem Untergruppenwachstum notwendigerweise auflösbar sind. Nun besitzt der Chevalley-Typ A1 neben

$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{Q}_p)$ genau eine weitere $\mathbb{Q}_p$-Form, nämlich $\mathfrak{sl}_1(\mathbb{D}_p)$, wobei $\mathbb{D}_p$ die (bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte) zentral-einfache $\mathbb{Q}_p$-Divisionsalgebra vom Index 2 bezeichnet. Sei Δ_p die maximale $\mathbb{Z}_p$-Ordnung von $\mathbb{D}_p$. Es war tatsächlich eine kleine Überraschung, als ich feststellte, daß das $\mathbb{Z}_p$-Liegitter $\mathfrak{sl}_1(\Delta_p)$ im Gegensatz zu $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z}_p)$ lineares Teilgitterwachstum vorweist. Genauer gilt [Klo03a]:

$$\zeta_{\mathfrak{sl}_1(\Delta_p)} = \zeta_p(s)\zeta_p(2s-1)\zeta_p(2s-2). \tag{4.2}$$

Insbesondere ist die Anzahl der Lieteilgitter mit Index p^n in $\mathfrak{sl}_1(\Delta_p)$ von der Größenordnung p^n. Weitere Überlegungen, auf die ich nicht näher eingehen möchte, führen zu einer vollständigen Beschreibung der pro-p Gruppen mit linear beschränktem Untergruppenwachstum [Klo03c].

Die explizite Formel (4.2) spielt auch eine Rolle bei der Lösung eines weiteren von Shalev angeregten Problems: Jede profinite Gruppe G mit der Eigenschaft, daß $a_n(G) < n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ ist, besitzt eine offene zentrale, prozyklische Untergruppe; siehe [Kloa].

Ein wichtiges offenes Problem besteht darin, geeignete Methoden zur Berechnung weiterer Zetafunktionen zu entwickeln. Besonders naheliegend ist

Problem 4.1. *Bestimme $\zeta_G(s)$ für $G = \mathrm{SL}_d^1(\mathbb{Z}_p)$, $d \geq 3$, bzw. berechne die entsprechenden Zetafunktionen für die $\mathbb{Z}_p$-Liegitter $\mathfrak{sl}_d(\mathbb{Z}_p)$.*

Anhand der Formeln (4.1) und (4.2) läßt sich ein auffälliges, allgemein auftretendes Phänomen illustrieren: Es gelten die Funktionalgleichungen

$$\begin{aligned}\zeta_{\mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z}_p)}(s)|_{p\to p^{-1}} &= -p^{-3s+3}\zeta_{\mathfrak{sl}_2(\mathbb{Z}_p)}(s),\\ \zeta_{\mathfrak{sl}_1(\Delta_p)}(s)|_{p\to p^{-1}} &= -p^{-5s+3}\zeta_{\mathfrak{sl}_1(\Delta_p)}(s).\end{aligned}$$

Problem 4.2. *Für welche pro-p Gruppen G mit PSG erfüllt die zugehörige Zetafunktion eine Funktionalgleichung der Form*

$$\zeta_G(s)|_{p\mapsto p^{-1}} = \pm p^{as+b}\zeta_G(s)$$

mit $a, b \in \mathbb{Z}$? Woran liegt das? (Insbesondere sind diese Fragen für die lokalen Faktoren einer endlich erzeugten, nilpotenten Gruppe von großem Interesse.)

4.2. **Nilpotente Gruppen.** Während es bei der Untersuchung von Zetafunktionen p-adischer Liegruppen oftmals gerade auf die Eigentümlichkeiten der zugrundeliegenden Primzahl p ankommt, steht bei den nilpotenten Gruppen das Zusammenspiel der lokalen Faktoren „bis auf endlich viele“ im Vordergrund. Der folgende Satz stellt einen Höhepunkt der bislang entwickelten Theorie dar.

Satz 4.3 (du Sautoy, Grunewald [dSG00]). *Sei G eine (unendliche) endlich erzeugte, nilpotente Gruppe. Dann gelten:*

(i) *Die Konvergenzabzisse $\alpha(G)$ ist rational.*
(ii) *Die Funktion $\zeta_G(s)$ besitzt eine meromorphe Fortsetzung auf eine rechte komplexe Halbebene, die $\alpha(G)$ enthält.*
(iii) *Für $n \to \infty$ besteht die asymptotische Abschätzung $s_n(G) \sim cn^{\alpha}(\log n)^{\beta}$, wobei $c \in \mathbb{R}$, $\alpha = \alpha(G)$ und $\beta \in \mathbb{N}_0$. Hierbei gibt $\beta + 1$ die Polordnung von $\zeta_G(s)$ bei $s = \alpha$ an.*

Der Beweis beginnt mit der bereits erwähnten Integraldarstellung für die lokalen Zetafunktionen einer endlich erzeugten, nilpotenten Gruppe G: Es gibt endlich viele Polynome $f_0, f_1, \ldots, f_r, g_0, g_1, \ldots, g_r \in \mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_d]$, so daß für fast alle Primzahlen p gilt:

$$\zeta_{G,p}(s) = a_{p,0}^{-1} \int_{V_p} |f_0(\mathbf{x})|_p |g_0(\mathbf{x})|_p^s d\mu,$$

wobei $V_p = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_p^d \mid |f_i(\mathbf{x})|_p \geq |g_i(\mathbf{x})|_p \text{ für } 1 \leq i \leq r\}$ und $a_{p,0} \neq 0$ einfach nur einen Skalierungsfaktor darstellt. Integrale von dieser Gestalt heißen Kegelintegrale, da der Integrationsbereich bei geeigneter Interpretation eine kegelförmige Gestalt besitzt. Eine Auswertung des Integrals, zu der im allgemeinen zunächst die Singularitäten im Integrationsbereich aufgelöst werden müssen, liefert die Formel

$$a_{p,0}\zeta_{G,p}(s) = a_{p,0} + \sum_{I \in \mathcal{S}} c_p(I) P_I(p, p^{-s}),$$

wobei $\mathcal{S}$ eine endliche Menge (Boolescher Kombinationen) von algebraischen Varietäten über $\mathbb{Z}$ bezeichnet, die Koeffizienten $c_p(I)$ jeweils die Anzahl der $\mathbb{F}_p$-Punkte auf der Reduktion von I modulo p angeben und jedes $P_I(Y_1, Y_2)$ eine rationale Funktion über $\mathbb{Q}$ darstellt.

Eine Lang-Weil-Abschätzung für die Anzahl von $\mathbb{F}_p$-Punkten auf den Varietäten I modulo p liefert (i). Mit Hilfe von Artin L-Funktionen konstruiert man die in (ii) versprochene meromorphe Fortsetzung. Eine Anwendung geeigneter Tauberscher Sätze liefert schließlich (iii).

Derjenige Schritt, der im Moment am wenigsten durchschaut wird, ist das Auflösen der Singularitäten im Integrationsbereich. Nur in besonders einfachen Fällen ist dies praktisch durchführbar. Was für Varietäten mit welcher Art von Singularitäten als Integrationsbereich auftreten können ist weitgehend unbekannt. Eine diesbezüglich interessante Konstruktion findet sich in [dS01].

Ein wichtiges Problem besteht darin, die Abhängigkeit der lokalen Faktoren $\zeta_{G,p}(s)$ von p genauer zu klären. In diesem Zusammenhang besteht unter anderem das folgende

Problem 4.4. *Sei $F = F_{c,d}$ die freie nilpotente Gruppe der Klasse c mit $d \geq 2$ Erzeugenden. Existiert dann eine rationale Funktion $P(X,Y) \in \mathbb{Q}(X,Y)$, so daß für fast alle Primzahlen p gilt $\zeta_{F,p}(s) = P(p, p^{-s})$?*

In den Spezialfällen $c \in \{1,2\}$ oder $d = 2$ ist die Antwort bekannt und fällt positiv aus; vgl. Beispiel 2.2.

Zum Schluß möchte ich bemerken, daß ein enger Zusammenhang besteht zwischen Problem 4.4 und der berühmten PORC-Vermutung von Higman. Letztere, falls wahr, gibt Auskunft über die Anzahl der Isomorphietypen endlicher Gruppen von Primzahlpotenzordnung: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Zahl $r \in \mathbb{N}$ und Polynome $f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{Z}[X]$, so daß für jede Primzahl p die Anzahl der (Isomorphietypen von) Gruppen der Ordnung p^n gleich $f_j(p)$ ist, wobei $j \equiv_r p$ zu wählen ist. (Die Abkürzung PORC steht sinngemäß für „Polynomial On Residue Classes".) Details über die Verbindung mit Problem 4.4 finden sich in [dS00].

Literatur

[dS93] M. du Sautoy, *Finitely generated groups, p-adic analytic groups and Poincaré series*, Ann. Math. **137** (1993), 639–670.

[dS00] ———, *Counting p-groups and nilpotent groups*, Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. **92** (2000), 63–112.

[dS01] ———, *A nilpotent group and its elliptic curve: non-uniformity of local zeta functions of groups*, Isr. J. Math. **126** (2001), 269–288.

[dSG00] M. du Sautoy and F. Grunewald, *Analytic properties of zeta functions and subgroup growth*, Ann. Math. **152** (2000), 793–833.

[dSL96] M. du Sautoy and A. Lubotzky, *Functional equations and uniformity for local zeta functions of nilpotent groups*, Am. J. Math. **118** (1996), 39–90.

[dSSS00] M. du Sautoy, D. Segal, and A. Shalev (eds.), *New Horizons in pro-p Groups*, Progress in Mathematics, vol. 184, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 2000.

[dST02] M. du Sautoy and G. Taylor, *The zeta function of $\mathfrak{sl}_2$ and resolution of singularities*, Math. Proc. Camb. Philos. Soc. **132** (2002), 57–73.

[GSS88] F. Grunewald, D. Segal, and G. Smith, *Subgroups of finite index in nilpotent groups*, Invent. Math. **93** (1988), 185–223.

[Ila99] I. Ilani, *Zeta functions related to the group* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p)$, Isr. J. Math. **109** (1999), 157–172.

[Kloa] B. Klopsch, *Groups with less than n subgroups of index n*, to appear in Math. Ann.

[Klob] ———, *On the Lie theory of p-adic analytic groups*, to appear in Math. Z.

[Klo03a] ———, *Pro-p groups with linear subgroup growth*, Math. Z. **245** (2003), 335–370.

[Klo03b] ———, *Subgroup growth: the unfamiliar twin*, unpublished manuscript, 2003.

[Klo03c] ———, *Zeta functions related to the pro-p group* $\mathrm{SL}_1^1(\Delta_p)$, Math. Proc. Camb. Philso. Soc. **135** (2003), 45–57.

[Laz65] M. Lazard, *Groupes analytiques p-adiques*, Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. **26** (1965), 389–603.

[LMS93] A. Lubotzky, A. Mann, and D. Segal, *Finitely generated groups of polynomial subgroup growth*, Isr. J. Math. **82** (1993), 363–371.
[LS03] A. Lubotzky and D. Segal, *Subgroup growth*, Progress in Mathematics, vol. 212, Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, 2003.

Mathematisches Institut, Heinrich-Heine-Universität, Düsseldorf
E-mail address: klopsch@math.uni-duesseldorf.de